OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ, februarie 2015

BAREM DE CORECTARE

Clasa a V- a

SUBIECTUL I (7 p)

Determinați numărul natural n de patru cifre care are proprietatea că, dacă îi eliminăm cifra sutelor, din numărul rezultat scădem 2, apoi diferența obținută o înmulțim cu 19 și noul rezultat îl împărțim la 2, obținem n .

Soluție :

$n = \overline{abcd}$; $\overline{abcd} = \left[\left(\overline{acd} - 2\right) \cdot 19\right] : 2 \Rightarrow 2 \cdot \overline{abcd} = \left(\overline{acd} - 2\right) \cdot 19$ 1p

$2\left(1000a + 100b + \overline{cd}\right) = 19\left(100a + \overline{cd} - 2\right) \Rightarrow$

$100(a + 2b) = 17 \cdot \overline{cd} - 38$ 2p

$\mathcal{U}\left(17 \cdot \overline{\mathrm{cd}} - 38\right) = 0 \Rightarrow \mathrm{d} = 4 \Rightarrow 10(\mathrm{a} + 2\mathrm{b}) = 17\mathrm{c} + 3$ 2p

$\mathcal{U}(17\mathrm{c} + 3) = 0 \Rightarrow \mathrm{c} = 1 \Rightarrow \mathrm{a} + 2\mathrm{b} = 2$

$a = 2\,, b = 0, n = \ 2014$ 2p

SUBIECTUL II (7 p)

Se dau numerele :

$S_1 = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + (n - 1) + n$ şi

$S_2 = 1 - 2 + 3 - 4 + \cdots - (n - 1) + n$, unde n este un număr natural impar .

a) Să se determine numărul n știind că $S_1 = 2015 \cdot S_2$;

b) Care este cel mai mic număr natural nenul cu care trebuie înmulțit $S_1 + S_2$, astfel încât să se obțină un pătrat perfect ;

c) Aflați numerele naturale n și m , cu n impar, astfel încât $S_1 - S_2 = 2^m$.

Soluție :

a) $n = 2k + 1\,, k \in \mathbb{N}\,,\ S_1 = (2k + 1)(k + 1),\ S_2 = k + 1$

$(2\mathrm{k} + 1)(\mathrm{k} + 1) = 2015(\mathrm{k} + 1) \Rightarrow \mathrm{n} = 2015$ 2p

b) $S_1 + S_2 = 2(k + 1)^2$. Numărul căutat este 2 .....2p

c) $S_1 - S_2 = 2k(k + 1),\ k \in \mathbb{N}$ 1p

$k(k + 1) = 2^{m-1}, k \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}^*$

$k = 1\,, m = 2(\text{justificare}) \Rightarrow n = 3$ 2p

SUBIECTUL III (7 p)

Determinați numerele naturale a, b, c știind că :

$3a + 2b + c = 598\,;\ \ a + 2b + 3c = 602$ și $a < b < c$.

Soluție :

$(a + 2b + 3c) - (3a + 2b + c) = 4 \Rightarrow c - a = 2 \Rightarrow c = a + 2$ 2p

$3a + 2b + a + 2 = 598 \Rightarrow 2a + b = 298 \Rightarrow b = 298 - 2a$ 2p

$a < b < c \Rightarrow a < 298 - 2a < a + 2 \Rightarrow a = 99$ 2p

$b = 100\,,\ c = 101$ 1p

SUBIECTUL IV (7 p)

a) Demonstrați că $21^{22} < 5^{33} \cdot 2^{22}$

b) Aflați care dintre numerele $a = 2^{23} \cdot 5^{35}$ și $b = 3^{22} \cdot 7^{24}$ este mai mare .

Soluție :

a) $21^{22} < 5^{33} \cdot 2^{22} \Leftrightarrow 441^{11} < (5^3 \cdot 2^2)^{11} \Leftrightarrow 441^{11} < 500^{11}$ 2p

b) $a = 2^{22} \cdot 2 \cdot 5^{33} \cdot 5^2 = 2^{22} \cdot 5^{33} \cdot 50$ 2p

$b = 3^{22} \cdot 7^{22} \cdot 7^2 = 21^{22} \cdot 49$ 2p

$2^{22} \cdot 5^{33} > 21^{22}\,, 50 > 49 \Rightarrow a > b$ 1p